教育実習において無限 ∞ を教える授業での実践的試みの一例

城西大学理学部数学科　神島芳宣

1　序

初めに、城西大学オープンキャンパス模擬授業 (2016 年 3 月 26 日開催) における講義をもとに、 実数論に現れる『無限』というものを教育実習生が高校でどのように教えるかその実践例をアクティブラーニングラーニングの一環として、教材研究授業の中で試みる。

第 I 部
目的

3 年で教材研究 I, II を取った学生は 4 年になって、各高校、中学校に教育実習に行く。大学では、特にその実際の教え方・指導などは教授できず、現場の教員に委ねている。しかし、4 年で 2 週間高校（中学校は 3 週間）に教育実習に行ったとき、後半数日間から一週間程度は実習生は授業を受け持たされる。大学の教員の立場として、その間正しく教科書の内容が教えられるかは、その大学の責任問題でもある。大学における解析・幾何・代数の科目を単に単位を取っているから教えることができるというわけではなく、大学の授業において十分にその分野の原理を習得していることが実践では必要となる。例えば 2 次方程式の解法 - これは公式も割と見やすく、わかりやすい。だから公式を教え、すぐ具体的な問題を解いて、これで学生に授業を理解させることができたという気になるかもしれない。一方で 3 次方程式、5 次方程式と一般次元にも解の公式があるのか素朴に疑問をもつ高校生がいるだろう。そこで、一般次元の方程式に対して解けるのかどうか代数方程式理論を大学で学んで理解している実習生ならば 2 次方程式の解の公式だけなぜ高校（中には中学）で導入されるか妥当である理由も理解している。当然、その実習生の授業は高校生にはより発展的なものとして期待される。ほかにも, 中間値の定理-グラフに書いて直感的説明で十分に見えるが、大学で『実数論』を学んで、すべて公理論的論証

の中からの産物であるという理解をもって、その余裕から実習生も「グラフで説明して中間値の定理」を高校生に理解させることは問題ないと思えてくる。

1.1 方法と効果

2016年におこなった教職科目「教材研究」ではアクティブラーニングの一環として、まず50人程度の学生を6～8人のグループに分け、各グループに**いくつかの教科書の中からランダムにそれぞれの単元のテーマとその授業実践例**を与え、まずその単元の内容を教員という立場からどう教えたらよいか、グループディスカッションをさせた（90分）。次の週に一グループ30分程度で代表が授業を行った（そのクラスの学生と教員は生徒という立場で授業を受けた。） 90分授業で3グループ、約7グループなので2回半くらいの授業時間をこれに割り当て、学生の主体的表現力、対応をみた。

教材研究でのこの試みは、教育実習を念頭に長期に継続的に見据えたグランドデザインの中の「マスタープラン」のひとつである。この実践的アクティブラーニングは教材研究からのものなので、教科書の内容に対し、よく吟味された部分（正の部分）と高校では教えるには無理があるような飛躍した部分（負の部分）をそのバランスに沿って教えてみて、教科書の内容を理解し、判断するという計画である。例えば教科書にある実数の説明で、実数は有理数と無理数からなるという事実は有理数を理解させることは正の部分であり、無理数の存在を構成的に説明することは大学では無理である（負の部分）。したがって、実数は高校ではわからないまま進んでしまう。さらに、複素数は実数よりもむしろ図形的見地から導入され、実数の存在事実を鵜みにしても、直感的にかつ代数的演算的立場から教えていく。大学の授業でこれらの関係を実数論（実数の連続性）、また代数（群・環・体）から学んだ学生にとってみれば、切れ切れに教える実数、複素数も全体的につながっているという安心感で高校生に教えることは大切である。何よりも好奇心のある学生が、数の体系的な質問をした場合、それ自体大変よいことなので、数学への興味を損なうことなく、丁寧に説明する。

1.2 結果と反省

このスタイルで実際の実践授業をおこなった結果、筆記テスト、レポートでは決して判定できないような実習生が (大学で模擬的に) 教えてみて、初めて自分が正しく理解していたかどうかを知るという個々人は重要な機会をもった。

ポジティブな数学的教育を充実させるためには、場当たり的な教え方ではだめで、マスタープランをもとに、実践的教育のための日々の授業の計画、実行、反省、マスタープランの修正、また授業計画、実行、反省と試行錯誤を繰り返し大学生の高校・中学校での教育実習にかかわるグランドデザインの構築に至ることが期待される。

第 II 部
無限 ∞ の取り扱い (マスタープラン)

そこで、実習生が高校に行くにあたって, 教科書 (数学 I) の実数について書かれた節をあらかじめ取り上げ, その中の『無限』をどのように理解させるか教科書を吟味しつつ, 一つの実践例として以下の無限に関する講義録を作成する.

1.3 個数

ひとつのものの集まりを持ってきて, それを数学では集合とよぶ. 集合を A とかくとすると,A を構成するものたちを**元**と呼ぶ. 二つのグループ (ものの集まり) を A, B とするとき, A の各元に, B の元を対応させることができるとき, その対応のことを写像 f といい, $f: A \to B$ とかく. このとき, 関数のように A を定義域, B を値域ということがある.

例. $A = \{1,2,3\}$ と $B = \{a,b,c\}$ とするとき,
(1) $f: A \to B$ は $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$ として得られる.
(2) $g(1) = a, g(2) = a, g(3) = c$ も A から B への写像である.
(3) $h(x) = x^2$ は $x \in \mathbb{R}$=実数全体とするとき, h は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$ への写像で, 2 次関数と呼ばれるものである.

定義 1.1 集合 X, Y に対し, 写像 $f: X \to Y$ があるとき X の各元と Y の各元が写像 f を通して一対一に対応するとき, X と Y は**対等**（同じ）という.
(1) の f は一対一に対応を与える.
(2) の g は一対一にならない.

注意として $f: A \to B$ が一対一対応なら, 必ず一対一対応 $g: B \to A$ がある. たとえば, 上の $f: A = \{1,2,3\} \longrightarrow B = \{a,b,c\}$, $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$ において, $g: B \to A$ は $g(a) = 1, g(b) = 2, g(c) = 3$ として得られる.

2　有限でない＝無限？

集合 A を構成する元の個数が有限のとき, 有限集合, そうでないとき無限集合という．これは教科書での定義であるが, ちょうど有理数でない実数を無理数というのと同じで, 何も意味しない．元が何もない集合を $A=\emptyset$ とかき, 空集合という.

定理 2.1 (有限集合分類) A を任意の空でない有限集合とする．ある自然数 n が存在して A は集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ と一対一になる.

証明. A を有限集合．A から一つ元をとり, a_1 と名付ける．$A_1=A\setminus\{a_1\}$ は空でなければ, A_1 から元をとり, a_2 と名付ける．$A_2=A\setminus\{a_1,a_2\}$ に対し以下この操作を続ける．ある自然数 n が存在して $A_n=A\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$ は空集合 $\emptyset$ になる．なぜなら, A は元の個数が有限だから, 元を取り出すこの操作はどこかで（有限回で）おわる．ゆえに $A_n=\emptyset$ から $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ となり, 写像 $f:A\to\{1,\ldots,n\}$ を $f(a_i)=i$ とおくことで一対一対応が得られる.

3　無限のいろいろ

教科書の記述は無限集合は場当たり的に書かれており, ややもすると自然数全体 $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ が同じ無限集合のように扱われる可能性もある．さて有限の元から構成されない集合を無限集合といった．しかし上の定理のような明確な区別があるのであろうか？

すでに有限集合はその元の**個数**によって決まることをみた．無限集合も元に個数（あるいは個数という概念）があれば, 区別 (対応) が可能であろう．しかし, 例えば自然数全体の集合 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ は大きい順に数え上げていく意味では個数は考えられるが明らかに元の個数は**有限でない**. さらに実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は自然に $\mathbb{N}$ を一部として含んでいるから元の個数は有限ではないし, さらに数え上げる**順番**がない.

定義通り $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ はともに無限集合といって差し支えないが, 「無限」集合全体の中に入れたとしても, 定理 2.1 のようにそれらが区別できるのかあるいは一対一対応があるのかは, **無限**を理解する上で重要な問題である.

集合 A と B の間に一対一対応があるとき, 記号で $A\sim B$ とかく.

3.1　有限の時には起こりえない無限集合のいくつかの奇妙な現象

無限になると, 直感的証明がうまくいえず, 悩むが考え方を切り替えるとまさに直感がものを言う. 学生は柔軟に個数を見直そう.

(1) まず, $\{1, 3, 5\}$ は明らかに $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ に真にふくまれていて, 個数も3と5だから明らかに異なる. (つまり, どんな写像 $f : \{1, 3, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ をとっても, 一対一写像とはなりえない.)

では偶数全体 $N_e = \{2, 4, 6, \dots\}$ は自然数全体集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ に真に含まれる.

$$\mathbb{N}_e \subset \mathbb{N}$$

では, 上のように一対一集合とは言えない？

次の矢印の対応で写像をつくる. (元の形で書けば $f(n) = 2n$.)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

これは $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}_e$ との一対一対応を与えている. $\mathbb{N} \sim N_e$. $\mathbb{N}_e$ は $\mathbb{N}$ に真に含まれるにもかかわらず, 無限の『個数』は同じということができる .

定義 3.1 このように, 元の個数は有限でなくても, $\mathbb{N}$ と一対一対応がつくような集合（つまり, 元に番号 $1, 2, 3, \dots$ と付けることができる）のことを**可算集合**とよぶ.

この定義から, 可算集合という無限集合の一つのクラスが得られた.

次に無限集合はすべて可算集合か, もしそうでないなら非可算集合なるものがあることになる.

比較的よく知られている集合が可算集合かどうか, 学生に証明のテクニックを教える. 例えば, 可算集合の例をいくつか挙げる $\implies$ 整数全体 $\mathbb{Z}$, 有理数全体 $\mathbb{Q}$. 格子の集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

例えば, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ は下記の図式の矢印に沿って番号を付けていけば, $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ との間の一対一対応が得られる.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
(1,1) & & (2,1) & \rightarrow & (3,1) & & (4,1) & \rightarrow & \cdots & \cdots & (k,1) & \rightarrow\cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
(1,2) & & (2,2) & & (3,2) & & (4,2) & & \cdots & \cdots & (k,2) & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
(1,3) & & (2,3) & & (3,3) & & (4,3) & & \cdots & \cdots & (k,3) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
(1,4) & & (2,4) & & (3,4) & & (4,4) & & \cdots & \cdots & (k,4) & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
(1,5) & & (2,5) & & (3,5) & & (4,5) & & \cdots & \cdots & (k,5) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & &
\end{array}
$$

(2) 無限集合から可算部分集合を除くと？

定理 3.1 次の集合は一対一である．

$$[0,1] \sim (0,1).$$

証明. 集合 B が A に含まれているとき ($B \subset A$ とかく), A から B の元を全部取り除いた残りの元の集合を $A \setminus B$ と表す．

一対一写像 $f:[0,1]\to(0,1)$ をつくればよい．集合 X を次のようにおく．

$$X = [0,1] - \{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}.$$

このとき, $X = (0,1) - \{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}$ でもある．したがって, $[0,1]$, $(0,1)$ はそれぞれ和 $\cup$ の形であらわすことができる．

$$
\begin{aligned}
[0,1] &= X \cup \{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\} \\
(0,1) &= X \cup \{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}
\end{aligned}
$$

一対一対応 $g:\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}\longrightarrow\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\}$ をシフトで定義する, つまり

$$
\begin{aligned}
&g(0)=\frac{1}{2},\ g(1)=\frac{1}{3}, \\
&g(\frac{1}{2})=\frac{1}{4},\ g(\frac{1}{3})=\frac{1}{5},\ \ldots,\ g(\frac{1}{n})=\frac{1}{n+2},\cdots
\end{aligned}
$$

恒等写像 $\mathrm{id}:X\to X$ を $\mathrm{id}(x)=x$ とすれば, 明らかに一対一写像．

和における写像を

$$\mathrm{id} \cup g : X \cup \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\} \longrightarrow X \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$$

により定義すれば, これが求める一対一写像である.

4 連続体

ここで $(0,1)$ は可算集合であろうか?

定理 4.1 (Cantor) $(0,1)$ は非可算（集合）である.

証明. $(0,1)$ が可算として Cantor の対角線論法を使って, 矛盾を導く.

もし $(0,1)$ が可算ならば $(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ とおける. $(0,1)$ の点を無限小数展開して記述できる. ($0.5 = 0.499999\cdots$, $0.48 = 0.479999\cdots$ など.)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ x_2 & = & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ \vdots & & \cdots \\ x_n & = & 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \\ \vdots & & \end{array}$$

ここで $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$. そこで b_1 を $a_{11}, 0, 9$ 以外の数から一つ選ぶ. b_2 を $a_{22}, 0, 9$ 以外の数から一つ選ぶ. 以下同様に b_n を $a_{nn}, 0, 9$ 以外の数から一つ選ぶ. $y = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ とおくと $y \in (0,1)$ であるから, ある m で $y = x_m$ となる. 小数点以下第 m 位を比較して $b_m = a_{mm}$ となってしまうが b_m のとり方から矛盾.

系 4.1 実数全体 $\mathbb{R}$ は非可算（集合）である.

$(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ は $x \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2}$ により一対一. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ は $\theta \mapsto \tan\theta$ により一対一. 一対一の合成は再び一対一だから, $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

5 非可算性の別の試み

Cantor の対角線論法はあまりにも有名である. $\mathbb{R}$ の非可算性の証明をもう一つ与える. 学生にほかにも平面集合が非可算集合であることを考えさせるような数学的好奇心を育てる授業を考える.

$\mathbb{N}$ から 2 個の集合 $\{0,1\}$ への写像を考え, それらを全部集めた集合を $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ とおく. (定義より空集合 $\{\emptyset\}$ も $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ の元である.)

まず $z \in [0,1]$ を 2 進展開であらわす. z が $\dfrac{1}{2}$ と比べて左にあるとき $x_1 = 0$, 等しいか右にあるときは $x_1 = 1$ とする. 次に $z - \dfrac{1}{2} \cdot x_1$ と $\dfrac{1}{2^2}$ を比較して, 同様に左, 右で $x_2 = 0, 1$ として $z - \dfrac{1}{2} \cdot x_1 - \dfrac{1}{2^2} \cdot x_2$ をつくる. 続けて数列 $y_n = z - \dfrac{1}{2} \cdot x_1 - \cdots - \dfrac{1}{2^n} \cdot x_n$ ができるが, 数列 $\{y_n\}$ は $0 < y_n < 1$, $y_{n+1} \leqq y_n$ を満たすから下に有界な単調減少数列. (実数論から) 数列 $\{y_n\}$ は収束する. その極限は 0 になることがわかるので,

$$0 = \lim_{n \to \infty} y_n = z - \sum_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \cdot x_n.$$

となる.

ここで $z = \displaystyle\sum_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \cdot x_n$, x_n は 0 か 1 である.

$h_z : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ を $h_z(n) = x_n$ とおけば, $h_z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

命題 5.1 $\psi(z) = h_z$ による対応 $\psi : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ は一対一.

証明.

単射性. $w \in [0,1]$, $w = \displaystyle\sum_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \cdot t_n$, ($t_n$ は 0 か 1) とする.

$\psi(z) = \psi(w)$ ならば, おきかたより $h_z = h_w \Longrightarrow h_z(n) = h_w(n) \Longrightarrow x_n = t_n \Longrightarrow x = \displaystyle\sum_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \cdot x_n = \sum_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \cdot t_n = w$.

全射性. $f \in 2^{\mathbb{N}}$ を任意にとる. $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ から $f(n) = x_n$ とおけば, $x_n = 0$ か 1. 形式的に

$$z = \frac{1}{2} \cdot x_1 + \cdots + \frac{1}{2^n} \cdot x_n + \cdots$$

とおけば $z \leqq \displaystyle\sum_{n \to \infty} \frac{1}{2^n}$ で $\displaystyle\sum_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$ から $z \in [0,1]$. $\psi(z) = h_z$ は $h_z \in 2^{\mathbb{N}}$ で, つくりかたより $h_z(n) = x_n$ だから, $h_z = f$ である. $\psi(z) = f$ 全射.

この応用として, $\mathbb{R}$ の非可算性の別証明が得られる.

系 5.1 $\mathbb{R}$ は非可算.

$\mathbb{R}$ と区間 $(0,1)$ は一対一, $(0,1)$ と閉区間 $[0,1]$ は一対一. 命題 5.1 から $[0,1]$ と $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ は一対一. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ が非可算をいえばよい.

n は
$$n(i) = \begin{cases} 1 & (i = n) \\ 0 & (i \neq n) \end{cases}$$
により写像 $n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ とみる．

もし一対一対応 $\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ があったとする．$\mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$ とおく．$\mathbb{M} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ であるから $\varphi(m) = \mathbb{M}$ となる $m \in \mathbb{N}$ がある．この m は, $m \notin \varphi(m)$ $(= \mathbb{M})$ ならば, $\mathbb{M}$ のおき方より $m \in \mathbb{M}$ となり矛盾, 一方 $m \in \varphi(m)$ $(= \mathbb{M})$ ならば, $\mathbb{M}$ の定義より $m \notin \varphi(m)$ $(= \mathbb{M})$ となり矛盾．どちらも矛盾．ゆえに $\mathbb{N}$ と $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ の間にはいかなる一対一対応も存在しない．
(注意: $Y = \emptyset$ であっても, 定義より $\varphi(l) = \{\emptyset\}$ となる $l \in \mathbb{N}$ は存在.)

6 まとめ

- 無限集合に大きくわけて可算集合と非可算集合がある．
- 可算集合はすべて（定義より）$\mathbb{N}$ と一対一．
- 非可算集合の例として, $\mathbb{R}$ がある．
- 無限集合には個数は定義されないが, 個数の一般化としての**濃度**と呼ばれるものが定義される．集合 A の濃度を $|A|$ とかく．濃度は大小関係がある．$|A| \leq |B|$.
- $\mathbb{N} = \infty$ である．（したがって $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \infty$.)
- 定理 4.1 より, $\infty < |\mathbb{R}|$ である．
- 実は $|\mathbb{R}| < |A|$ となるような集合がいくらでも存在することが知られている．